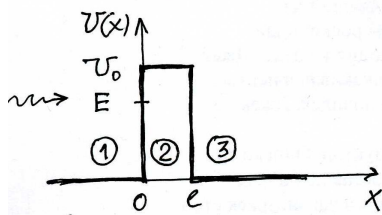


Раздел V. Атомная и ядерная физика.

Глава 3. Простейшие задачи

квантовой механики.

1. Туннельный эффект.



Частица движется на потенциальный барьер слева, энергия частицы меньше высоты потенциального барьера $E < U_0$.

С точки зрения классической механики, такая частица не может пройти через барьер. В квантовой механике появляется отличная от 0 вероятность прохождения через барьер.

Стационарное уравнение Шредингера в соответствующих областях имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{① и ③}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \beta^2\psi = 0, \quad \beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}} \quad \text{②}$$

Решения в соответствующих областях:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \quad x < 0 \quad \text{①}$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \quad 0 < x < l \quad \text{②}$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x} \quad x > l \quad \text{③}$$

A_1 - амплитуда падающей на барьер волны

B_1 - амплитуда отраженной от барьера волны

A_3 - амплитуда прошедшей через барьер волны

$B_3 = 0$, так как отраженной волны в области ③ нет.

Волновая функция и ее производная обязаны быть непрерывными:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$\psi_2(l) = \psi_3(l) \Rightarrow A_2 e^{\beta l} + B_2 e^{-\beta l} = A_3 e^{i\alpha l}$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta A_2 - \beta B_2$$

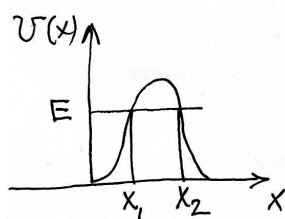
$$\psi_2'(l) = \psi_3'(l) \Rightarrow \beta A_2 e^{\beta l} - \beta B_2 e^{-\beta l} = i\alpha A_3 e^{i\alpha l}$$

Из этих уравнений коэффициент прохождения

$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$ получается следующим:

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \cdot \ell} \quad D_0 \sim 1$$

Если потенциальный барьер не прямоугольный, то:

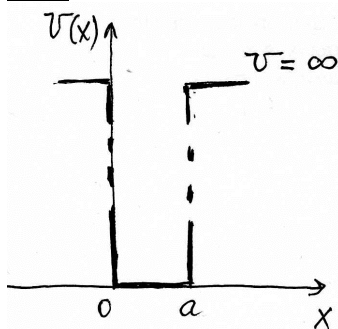


$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx}$$

Коэффициент прохождения тем больше, чем ниже и уже потенциальный барьер.

Туннельный эффект лежит в основе многих явлений: α - распад, спонтанное деление ядер, контактная разность потенциалов, холодная эмиссия электронов из металлов...

2. Квантование энергии частицы в потенциальной яме.



При $0 < x < a$ стационарное уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x)$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \alpha^2 \Psi = 0,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Граничные условия: $\Psi(0) = 0$,
 $\Psi(a) = 0$

Общий вид решения:

$$\Psi(x) = C \sin(\alpha x + \varphi)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\Psi(a) = 0 \Rightarrow \alpha a = \pi n \Rightarrow$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \cdot \frac{n^2}{a^2}$$

$$n=1, 2, 3 \dots$$

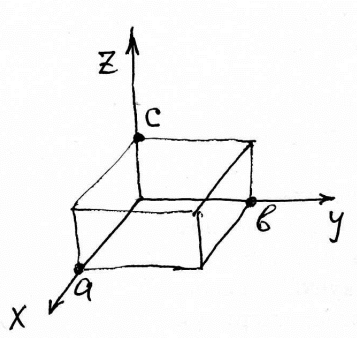
$$\Psi_n = C \sin \frac{\pi n x}{a}$$

Если нормировать волновые функции условием

$$\int_0^a |\Psi|^2 dx = 1, \text{ то } C = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Энергия частицы в потенциальной яме не может быть произвольной, а только из набора дискретных значений E_n . Этот эффект называется эффектом квантования. В квантовой механике не только энергия, но и другие физические величины могут быть дискретными.

3. Эффект вырождения по энергии.



В трехмерном потенциальном ящике ($U = 0$ внутри ящика, $U = \infty$ вне) энергия частицы и соответствующие волновые функции имеют вид:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right)$$

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{b} \cdot \sin \frac{\pi n_3 z}{c}$$

$$n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

При $a=b=c$ вследствие симметрии $U(x,y,z)$

$$E_{112} = E_{121} = E_{211}$$

$$E_{123} = E_{321} = E_{231} \text{ и т.д.}$$

Явление, когда частица описывается различными волновыми функциями (различные квантовые состояния), а энергии одинаковы, называется эффектом вырождения по энергии. Это явление связано с симметрией потенциальной энергии частицы.

Вопросы.

1. Что такое туннельный эффект.
2. Что такое квантование энергии.
3. Что такое вырождение по энергии.
4. Спектр энергий частицы в потенциальной яме и ящике.